Практикум из Математике 2 – ПРЕДРОК – 27. 5. 2022.

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Име и презиме: Број индекса:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Сума

Испит траје 90 минута. Сваки задатак вреди 10 бодова.

1. Одредити интеграл $\int \frac{3^x}{1-9^x}\,d\,x$.

2. Израчунати величину површине коју заклапају праве $y = 5x-5$, $y = -5x-5$ и полукружница $x^2+y^2=1$, $y \geq 0$.

3. У зависности од вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ решити диференцијалну једначину $y'' + ay' = e^x$.

4. Испитати да ли су тачне једнакости:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!} = 0;$ **(б)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2};$ **(в)** $\displaystyle 1 - \ln 2 = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$

Детаљно образложити одговоре.

5. У зависности од вредности параметра $p \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-p & p \\ p & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -p-1 \end{bmatrix}.$$

6. У зависности од вредности параметра $b \in \mathbb{R}$ одредити минимални полином матрице

$$B = \begin{bmatrix} 2 & b(b+1) & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 1 & b(b+2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Дате су праве $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ и $q : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-5}{-1}$.

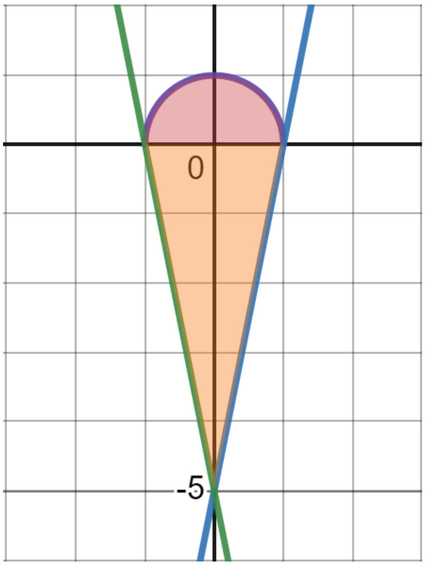
(а) Одредити тачку M која је пресек правих p и q.

(б) Одредити једначину равни α у којој леже праве p и q.

– Решења –

1. Интеграл $\int \frac{3^x}{1-9^x}\,\mathrm{d}\,x$ решавамо сменом $t = 3^x$, $\mathrm{d}\,t = 3^x \ln 3\,\mathrm{d}\,x$. Добијамо $\int \frac{3^x}{1-9^x}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{\ln 3}\int \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2-1}$. Даље имамо да је $\int \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{t+1-(t-1)}{t^2-1}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}\,t}{t-1} - \int \frac{\mathrm{d}\,t}{t+1}\right) = \frac{1}{2}(\ln|t-1| + \ln|t+1|) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$. Према томе, $\int \frac{3^x}{1-9^x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x+1}{3^x-1}\right| + C$.

2. Величина површине коју заклапају праве $y = 5x-5$, $y = -5x-5$ и полукружница $x^2+y^2 = 1$, $y \geq 0$ једнака је $P = \int_{-1}^{0}\left(\sqrt{1-x^2} - (-5x-5)\right)\mathrm{d}\,x + \int_{0}^{1}\left(\sqrt{1-x^2} - (5x-5)\right)\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^{0}(5x+5)\mathrm{d}\,x + \int_{0}^{1}(5-5x)\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2} + 5$.



$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} & \mathrm{d}\,v = \mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,u = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right\} \\
&= x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = -\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x \\
&= -\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}} = -I + \arcsin x\Big|_{-1}^{1} \\
&= \pi - I \qquad\qquad I = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$\int_{-1}^{0}(5x+5)\mathrm{d}\,x = 5\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{5}{2}$$

$$\int_{0}^{1}(5-5x)\mathrm{d}\,x = 5\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{5}{2}$$

Други знатно једноставнији начин да се реши овај задатак јесте да се примети да се наша фигура састоји од пола круга полупречника 1 и два правоугла троугла чије су катете дужина 1 и 5. Дата величина површине једнака је $P = \frac{1}{2}1^2\pi + 2\frac{1\cdot 5}{2} = \frac{\pi}{2} + 5$.

3. Размотримо прво придружену хомогену диференцијалну једначину $y'' + ay' = 0$. Одговарајућа карактеристична једначина гласи $\lambda^2 + a\lambda = 0$. Њени корени су $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_1 = -a$. Уколико је $a \neq 0$ корени су различити, па је опште решење хомогене линеарне диференцијалне једначине $y_h = C_1 + C_2e^{-ax}$. За $a = 0$ имамо да је $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ двоструки корен карактеристичне једначине, што нам даје опште решење хомогене диференцијалне једначине $y_h = C_1 + C_2\,x$. Сада ћемо да размотримо нехомогену диференцијалну једначину $y'' + ay' = e^x$. Разматрамо под којим условима је $\mu = 1$ корен карактеристичне једначине. За $a = -1$ имамо да је $\mu = 1$ корен карактеристичне једначине и у том случају партикуларно решење нехомогене једначине тражимо у облику $y = Axe^x$. Имамо да је $y' = A(1+x)e^x$ и $y'' = A(2+x)e^x$. Према томе, $A(2+x)e^x - A(1+x)e^x = e^x$, односно $A = 1$ и $y_p = xe^x$. Ако је $a \neq -1$ партикуларно решење је облика $y_p = Be^x$. Како је $y'' = y' = Be^x$, добијамо $Be^x + aBe^x = e^x$, тј. $B = \frac{1}{1+a}$ и $y_p = \frac{e^x}{1+a}$. Закључујемо да је решење полазне диференцијалне једначине дато са

$$
y = y_h + y_p = \begin{cases} C_1 + C_2\,x + e^x, & a = 0; \\ C_1 + C_2e^x + xe^x, & a = -1; \\ C_1 + C_2e^{-ax} + \frac{e^x}{1+a}, & a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}. \end{cases}
$$

4.

(а) Како је $\sin x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ за свако $x \in \mathbb{R}$, следи да је $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin\pi = 0$, те је наведена једнакост тачна.

(б) Како је $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ за свако $x \in \mathbb{R}$, следи да је

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots,$$

одакле закључујемо да је $\frac{1}{e} - \frac{1}{2} = \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$. Дакле, наведена једнакост није тачна.

(в) Како важи да је $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ за $x \in (-1,1]$, следи да је $\ln 2 = \ln(1+1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$. Одатле је $1 - \ln 2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ те је наведена једнакост тачна.

Дакле, тачне су једнакости под **(а)** и **(в)**.

5. Заменимо места првој и трећој врсти матрице A, а потом прву врсту помножену са $-p$ додајмо другој врсти и прву врсту одузмимо од треће врсте. Добијамо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-p & p \\ p & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -p-1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ p & -1 & 1 \\ 1 & 1-p & p \\ 0 & 1 & -p-1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1+p \\ 0 & 1-p & p+1 \\ 0 & 1 & -p-1 \end{bmatrix}.$$

Затим другу врсту одузмимо од треће врсте и другу врсту додајмо четвртој врсти. Потом заменимо места другој и трећој колони. Следи

$$A \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1+p \\ 0 & 2-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+p & -1 \\ 0 & 0 & 2-p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Закључујемо да је $\mathrm{rang}A = 3$ за $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, иначе је $\mathrm{rang}A = 2$.

6. Карактеристични полином матрице B једнак је $\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_4) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)^2$. Како минимални и карактеристични полиноми имају исте факторе, конкуренти за минимални полином су $\mu_1(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)$, $\mu_2(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)$, $\mu_3(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$ и $\mu_4(\lambda) = \varphi_A(\lambda)$. По дефиницији, минимални полином матрице B је монични полином најнижег степена који матрица B анулира. Имамо да је

$$(B - 2I_4)(B - I_4) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b(b+1) & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & -1 & b(b+2) \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b(b+1) & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & b(b+2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b(b+1) & 0 & b(b+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b(b+2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ако је $b=0$ имамо да је $\mu_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$ минимални полином. Даље важи да је

$$(B-2I_4)^2(B-I_4)=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b(b+1) & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & -1 & b(b+2) \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b(b+1) & 0 & b(b+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b(b+2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b(b+2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Одакле закључујемо, ако је $b=-2$ важи да је $\mu_2(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$ минимални полином. И на крају

$$(B-2I_4)(B-I_4)^2=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b(b+1) & 0 & b(b+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b(b+2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b(b+1) & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & b(b+2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b(b+1) & 0 & b(b+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Према томе, за $b=-1$ минимални полином је $\mu_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$. Уколико је $b\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2\}$ минимални полином је једнак карактеристичном.

7. Параметарски облик једначине праве p је

$$x=t+2, \quad y=-t+1, \quad z=2t, \quad t\in\mathbb{R},$$

док је параметарски облик једначине праве q једнак

$$x=s, \quad y=-s+3, \quad z=-s+5, \quad s\in\mathbb{R}.$$

(а) Како тачка M припада и правој p и правој q, њене координате морају да задовољавају једначине обе праве. Следи

$$\begin{aligned} t+2&=s \\ -t+1&=-s+3 \\ 2t&=-s+5 \end{aligned}\ ,$$

одакле добијамо $t=1$ и $s=3$. Заменом $t=1$ у параметарску једначину праве p добијамо да је $M\,(3,0,2)$.

(б) Како праве p и q леже у равни α, вектор нормале те равни је колинеаран са вектором $\overrightarrow{v_p}\times\overrightarrow{v_q}$. Вектор $\overrightarrow{v_p}\times\overrightarrow{v_q}$ налазимо као

$$\overrightarrow{v_p}\times\overrightarrow{v_q}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(3,3,0)\,.$$

Дакле, вектор нормале равни α је $\overrightarrow{n_\alpha}=(1,1,0)$, тачка $M\,(3,0,2)$ припада равни α, одакле следи да је једначина равни α управо $x+y-3=0$.